最適化の数理

数理工教育研究センター

上江洲　弘明

目次

１．線形計画問題

生産計画問題を例として，線形計画問題とはどういった問題なのか見ていこう．また，その解決法の 1 つである線形計画法についても確認していく．

1.1 線形計画問題の例

例題 1.1 ある会社では，原料Ⅰ，Ⅱ，Ⅲを使って，2 種類の製品A,Bを生産している．製品Aを 1[t]生産するには，原料Ⅰ，Ⅱ，Ⅲがそれぞれ 4，1，2[t]必要であり，製品Bを 1[t]生産するには，原料Ⅰ，Ⅱ，Ⅲがそれぞれ 1，3，2[t]必要である．1 日の原料Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの使用可能量は，それぞれ 72，48，48[t]である．また，製品A,Bを生産したときの 1[t]あたりの利益はそれぞれ 3 万円，2 万円である．1 日あたりの利益を最大にするには，製品A,Bをどれくらい生産すればよいか．

[解説]

まず条件を表にまとめてみると以下のようになる．

	原料Ⅰ	原料Ⅱ	原料Ⅲ
製品A	4	1	2
製品B	1	3	2
使用可能量	72	48	48

また，製品Aをx[t]，製品Bをy[t]だけ生産すると，その利益z[円]は以下の数式で表される．

$$z = 3x + 2y$$

1 日あたりの原料使用可能量のことを考慮すれば，この問題は以下のようにまとめられる．

連立不等式

$$\begin{cases} 4x + y \leq 72 \\ x + 3y \leq 48 \\ 2x + 2y \leq 48 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

の範囲内で，利益

$$z = 3x + 2y$$

を最大化する(x, y)を求めよ．

これがオーソドックスな「線形計画問題」であり，これを解いてzの値を最大化する「実行可能」な(x, y)を求める．この問題は 2 変数の線形計画問題であり，高等学校の数学の範囲で解くことができる．その手法は，

不等式の表す領域を図示し，この領域内で直線$z = 3x + 2y$を考えてzの最大値を求める

というものであった．

それでは実際に解答してみよう．
連立不等式

$$\begin{cases} 4x + y \leq 72 \\ x + 3y \leq 48 \\ 2x + 2y \leq 48 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

の表す領域は図 1.1 のようである[1]．線形計画問題においてはこの領域を，**実行可能領域**（feasible region）という．

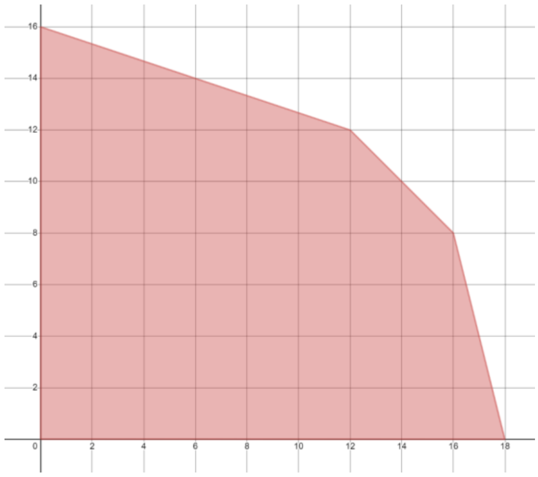


図1.1　不等式の表す領域

この領域内に利益$z = 3x + 2y$を最大化する(x, y)が存在する．いま，$z = 5x + 4y$を

$$z = 3x + 2y$$

$$2y = -3x + z$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{z}{2}$$

と変形すれば，$z = 3x + 2y$は傾き$-\frac{3}{2}$，y切片$\frac{z}{2}$の直線を表していることが分かる．このことより，領域内を通り，y切片$\frac{z}{2}$が最大となる直線は図 1.2 より点$(16, 8)$を通ることが分かる．

[1] 図は DESMOS(https://www.desmos.com/calculator?lang=ja)を用いて作成した

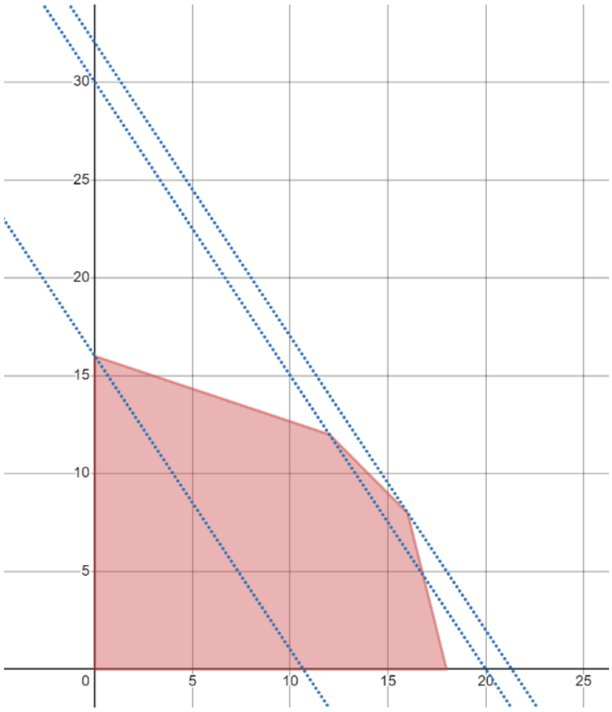


図1.2　領域内を通るような直線$y = -\frac{3}{2}x + \frac{z}{2}$

よって，$(x, y) = (16, 8)$のとき利益zが最大となり，その値は

$$z = 3 \cdot 16 + 2 \cdot 8 = 64\left[\text{万円}\right]$$

であることが分かる．

線形計画問題では，例 1.1 における利益zを**目的関数**（objective function），不等式を**制約条件**（constraints）という．また，例題 1.1 を定式化した線形計画問題は

$$\begin{array}{ll} \mathit{maximize}: & z = 3x + 2y \\ \mathit{subject\ to}: & 4x + y \leq 72 \\ & x + 3y \leq 48 \\ & 2x + 2y \leq 48 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

のように表される．

問題 1.1 次の線形計画問題を解け．【解答(1) (2)】

（1）

$$\begin{aligned} &maximize: &&z = 4x + 5y \\ &subject\ to: &&x + y \leq 3 \\ & &&x + 2y \leq 4 \\ & &&x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned} &maximize: &&z = 4x + 3y \\ &subject\ to: &&6x + 4y \leq 38 \\ & &&2x + 3y \leq 21 \\ & &&2x + y \leq 12 \\ & &&x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

さて，上記のような手順で線形計画問題を解くことができることが分かったが，変数が増加するとどうなるだろうか．例えば例題 1.1 において製品C, Dを追加したと考えると，実行可能領域を平面上に図示することができなくなり，視覚的に解くことができなくなる．

このような一般的な線形計画問題を解くアルゴリズムの 1 つにシンプレックス法がある．次節でシンプレックス法について確認していこう．

1.2 シンプレックス法

簡単な線形計画問題の例を通して，**シンプレックス法**(単体法，simplex method)の基本的な考え方を確認していこう．

1.2.1 基準型線形計画問題

ここでは基準型とよばれる簡単な形の線形計画問題について考える．**基準型**(canonical form)線形計画問題とは，次の 3 つの条件をみたす線形計画問題のことである．

① 最大化問題
② すべての変数が非負
③ 非負条件以外のすべての不等式制約条件はすべて「≤」向き

例えば例題 1.1：

$$\begin{aligned} &maximize\colon && z = 3x + 2y \\ &subject\ to\colon && 4x + y \leq 72 \\ &&& x + 3y \leq 48 \\ &&& 2x + 2y \leq 48 \\ &&& x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

は基準型線形計画問題である．

基準型でない一般の線形計画問題の場合，いくつかの変形を行って基準型線形計画問題に帰着させることができる．よって，理論上は基準型線形計画問題のみ解ければ十分である．

1.2.2　シンプレックス法

シンプレックス法で基準型線形計画問題を解いてみよう．

例題 1.2 次の線形計画問題を解け．

$$\begin{aligned} maximize\colon\quad & z = 3x + 2y \\ subject\ to\colon\quad & 3x + y \leq 9 \\ & x + 2y \leq 8 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

[解説]

いま，この問題を次のように書き換える．

$$\begin{aligned} maximize\colon\quad & z = 3x + 2y \\ subject\ to\colon\quad & 0 \leq 9 - 3x - y \\ & 0 \leq 8 - x - 2y \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

さらに，**スラック変数**（slack variable）とよばれる新たな変数s_1, s_2を導入し，等式制約表現に書き換える．

$$\begin{aligned} maximize\colon\quad & z \\ subject\ to\colon\quad & s_1 = 9 - 3x - y \\ & s_2 = 8 - x - 2y \\ & z = 3x + 2y \\ & x, y, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ここで，この等式制約表現による線形計画問題は最初の問題と同値であることは明らかである．また，左辺に現れている変数s_1, s_2, zを**基底変数**（basic variable），右辺に現れている変数x, yを**非基底変数**（nonbasic variable）という．非基底変数をすべて 0 にして得られる解を特に**基底解**（basic solution）という．この問題においては，非基底変数を 0 にするということは，すなわち$x = 0, y = 0$であるので，$s_1 = 9, s_2 = 8, z = 0$が得られ，基底解は

$$(x, y, s_1, s_2, z) = (0,0,9,8,0)$$

となる．基底解における目的関数の値は$z = 0$であるので，この問題においては基底解が最大化の解でないことは明らかである．それではzを最大化するため，基底解を出発点としてよりよい解を探索してみよう．

基底解から出発して目的関数zが増加するよう，解の改善を試みる．変数xの値だけを 0 からt_1まで増加させると，基底変数s_1, s_2, zの値は以下のようになる（xの値だけなので$y = 0$であることに注意）．

$$\begin{array}{rcl} s_1 & = & 9 - 3t_1 \\ s_2 & = & 8 - t_1 \\ z & = & 3t_1 \end{array}$$

$z = 3t_1$から，t_1を増加させるほど目的関数の値も増加させられることが分かるが，変数の非負条件$s_1, s_2 \geq 0$より$t_1 \leq 3$であることも分かる．よって，$x = 3$ $(t_1 = 3)$のとき，xだけを増加させて得られるもっともよい解

$$(x, y, s_1, s_2, z) = (3,0,0,5,9)$$

が得られる．この新しい解は，基底解$(x, y, s_1, s_2, z) = (0,0,9,8,0)$と$z$の値を除いて比較すると 0 の位置が入れ替わっている．0 の位置が入れ替わった場所は変数x, s_1の場所にあたり，そこでs_1の等式：

$$s_1 = 9 - 3x - y$$

をxについて解いて代入する．いま，

$$s_1 = 9 - 3x - y$$
$$3x = 9 - y - s_1$$
$$x = 3 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}s_1$$

であるので，

$$\begin{array}{c} x = 3 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}s_1 \\ s_2 = 8 - \left(3 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}s_1\right) - 2y \\ z = 3\left(3 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}s_1\right) + 2y \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x = 3 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}s_1 \\ s_2 = 5 - \frac{5}{3}y + \frac{1}{3}s_1 \\ z = 9 + y - s_1 \end{array}$$

が得られる．この式変形は同値変形であるので，問題としてはまったく同じである．つまり，元の最大化問題を

$$\begin{array}{ll} \mathit{maximize}: & z \\ \mathit{subject\ to}: & x = 3 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}s_1 \\ & s_2 = 5 - \frac{5}{3}y + \frac{1}{3}s_1 \\ & z = 9 + y - s_1 \end{array}$$

のように書き換えたことになる．この問題は基底変数がx, s_2, z，非基底変数がy, s_1の線形計画問題であるので，基底解は

$$(y, s_1, x, s_2, z) = (0,0,3,5,9)$$

であり，これはさきほどの$x = 3$のときの解と一致する．

それでは，さらにこの書き換えた問題を最大化してみよう．$z = 9 + y - s_1$より，yを増加させれば目的関数zが増加するので，yだけt_2に増加させる（$s_1 = 0$に注意）．これにより制約条件は

$$x = 3 - \frac{1}{3}t_2$$
$$s_2 = 5 - \frac{5}{3}t_2$$
$$z = 9 + t_2$$

となり，変数の非負条件$x, s_2 \geq 0$より$t_2 \leq 3$であることが分かる．よって，$y = 3\ (t_2 = 3)$のとき，yだけを増加させて得られるもっともよい解

$$(y, s_1, x, s_2, z) = (3,0,2,0,12)$$

が得られる．この新しい解は，基底解$(y, s_1, x, s_2, z) = (0,0,3,5,9)$と比較すると 0 の位置が入れ替わっている．0 の位置が入れ替わった場所は変数y, s_2の場所にあたり，そこでs_2の等式：

$$s_2 = 5 - \frac{5}{3}y + \frac{1}{3}s_1$$

をyについて解いて代入する．いま，

$$s_2 = 5 - \frac{5}{3}y + \frac{1}{3}s_1$$

$$\frac{5}{3}y = 5 + \frac{1}{3}s_1 - s_2$$

$$y = 3 + \frac{1}{5}s_1 - \frac{3}{5}s_2$$

であるので最大化問題は

$$\begin{aligned} &\mathit{maximize}: && z \\ &\mathit{subject\ to}: && x = 2 - \frac{6}{15}s_1 + \frac{1}{5}s_2 \\ &&& y = 3 + \frac{1}{5}s_1 - \frac{3}{5}s_2 \\ &&& z = 12 - \frac{4}{5}s_1 - \frac{3}{5}s_2 \end{aligned}$$

と書き換えることができる．この最大化問題については，$s_1, s_2 \geq 0$であることから$s_1 = s_2 = 0$のときzは最大化され，その値は$z = 12$であることが分かり，またそのときのx, yの値は$(x, y) = (2,3)$であることが分かる．

問題 1.2 シンプレックス法により次の線形計画問題を解け．【解答(1) (2)】

（1）　$maximize$:　$z = 5x + 4y$

$subject\ to$:

$$
\begin{aligned}
2x + y &\leq 4 \\
x + 2y &\leq 5 \\
x \geq 0&, y \geq 0
\end{aligned}
$$

（2）　$maximize$:　$z = 3x + 2y$

$subject\ to$:

$$
\begin{aligned}
x + 2y &\leq 17 \\
2x + y &\leq 13 \\
4x + 3y &\leq 27 \\
x \geq 0&, y \geq 0
\end{aligned}
$$

1.2.3　シンプレックス法の幾何的意味

例題 1.2 について，幾何的意味を考えてみよう．目的関数zの値を大きくすることを目的として，計算は基底解からスタートさせる．基底解におけるx, yは$(x, y) = (0,0)$であるので，図形的には原点から出発していることを意味している（図 1.3）．目的関数zを増加させるため，原点からxを$x = 3$と増加させたので，点は$(x, y) = (3,0)$に移動したことになる．さらに目的関数zを増加させるため，yを$y = 3$に増加させた．この操作でxは$x = 2$に減少する．これは点$(3,0)$から点$(2,3)$に移動したことを意味する．これで目的関数zを増加させるために非基底変数x, yを増加させる操作が完了したためシンプレックス法が終了する．最終的に$(x, y) = (2,3)$で目的関数は最大となる．

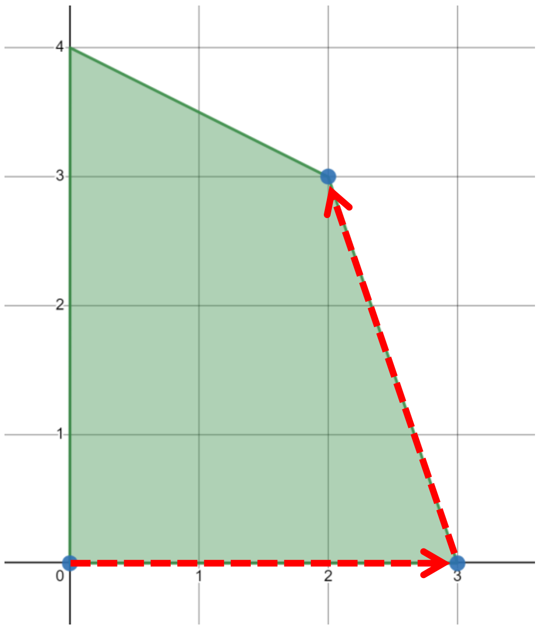


図1.3　シンプレックス法の幾何的意味

つまりシンプレックス法とは，実行可能領域における端点を次々と巡って，目的関数の“より大きな値”を探索する方法といえる．また，この方法は 2 変数だけでなく 3 変数以上についても同様に適用できる．

1.2.4　シンプレックス法（3 変数）

例題 1.3 次の線形計画問題を解け.

$$\begin{aligned} maximize\colon \quad & z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ subject\ to\colon \quad & x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \le 8 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 \le 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

[解答]

等式制約表現に書き換える.

$$\begin{aligned} maximize\colon \quad & z \\ subject\ to\colon \quad & s_1 = 6 - x_1 - x_2 - x_3 \\ & s_2 = 8 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ & s_3 = 8 - x_1 - x_2 - 3x_3 \\ & z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \ge 0 \end{aligned}$$

基底解は

$$(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, z) = (0,0,0,6,8,8,0)$$

であるので，$x_1 = t_1$とおくと，

$$\begin{cases} s_1 = 6 - t_1 \\ s_2 = 8 - 2t_1 \\ s_3 = 8 - t_1 \\ z = 3t_1 \end{cases}$$

であるので，zを最大化するt_1は$t_1 = 4$である．よってこの時点でもっともよい解は

$$(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, z) = (4,0,0,2,0,4,0)$$

である. ここでx_1とs_2が 0 が入れ替わったことが分かるので, s_2に関する制約表現を「$x_1 =$」の形に書き換える.

$$s_2 = 8 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$2x_1 = 8 - x_2 - x_3 - s_2$$

$$x_1 = 4 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}s_2$$

よって，制約条件は

$$\begin{aligned} subject\ to\colon \quad & s_1 = 6 - \left(4 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}s_2\right) - x_2 - x_3 \\ & x_1 = 4 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}s_2 \\ & s_3 = 8 - \left(4 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}s_2\right) - x_2 - 3x_3 \\ & z = 3\left(4 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}s_2\right) + 2x_2 + 4x_3 \end{aligned}$$

となり，これを変形して

$$\text{subject to:}\quad \begin{aligned} s_1 &= 2-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}s_2 \\ x_1 &= 4-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}s_2 \\ s_3 &= 4-\frac{1}{2}x_2-\frac{5}{2}x_3+\frac{1}{2}s_2 \\ z &= 12+\frac{1}{2}x_2+\frac{5}{2}x_3-\frac{3}{2}s_2 \end{aligned}$$

が得られる．この制約条件における基底解は

$$(x_2, x_3, s_2, s_1, x_1, s_3, z) = (0,0,0,2,4,4,12)$$

となり，次に$x_2 = t_2$とおけば制約条件は

$$\begin{cases} s_1 = 2-\frac{1}{2}t_2 \\ x_1 = 4-\frac{1}{2}t_2 \\ s_3 = 4-\frac{1}{2}t_2 \\ z = 12+\frac{1}{2}t_2 \end{cases}$$

であるので，zを最大化するt_2は$t_2 = 4$である．よってこの時点でもっともよい解は

$$(x_2, x_3, s_2, s_1, x_1, s_3, z) = (4,0,0,0,2,2,14)$$

である. ここでx_2とs_1が 0 が入れ替わったことが分かるので, s_1に関する制約表現を「$x_2 =$」の形に書き換える.

$$s_1 = 2-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}s_2$$

$$\frac{1}{2}x_2 = 2-\frac{1}{2}x_3-s_1+\frac{1}{2}s_2$$

$$x_2 = 4-x_3-2s_1+s_2$$

よって，制約条件は

$$\text{subject to:}\quad \begin{aligned} x_2 &= 4-x_3-2s_1+s_2 \\ x_1 &= 4-\frac{1}{2}(4-x_3-2s_1+s_2)-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}s_2 \\ s_3 &= 4-\frac{1}{2}(4-x_3-2s_1+s_2)-\frac{5}{2}x_3+\frac{1}{2}s_2 \\ z &= 12+\frac{1}{2}(4-x_3-2s_1+s_2)+\frac{5}{2}x_3-\frac{3}{2}s_2 \end{aligned}$$

となり，これを変形して

$$\begin{aligned} \textit{subject to}:\quad & x_2 = 4 - x_3 - 2s_1 + s_2 \\ & x_1 = 2 + s_1 - s_2 \\ & s_3 = 2 - 2x_3 + s_1 \\ & z = 14 + 2x_3 - s_1 - s_2 \end{aligned}$$

が得られる．この制約条件における基底解は

$$(x_3, s_1, s_2, x_2, x_1, s_3, z) = (0,0,0,4,2,2,14)$$

となり，次に$x_3 = t_3$とおけば制約条件は

$$\begin{cases} x_2 = 4 - t_3 \\ x_1 = 2 \\ s_3 = 2 - 2t_3 \\ z = 14 + 2t_3 \end{cases}$$

であるので，zを最大化するt_3は$t_3 = 1$である．よってこの時点でもっともよい解は

$$(x_3, s_1, s_2, x_2, x_1, s_3, z) = (1,0,0,3,2,0,16)$$

である. ここでx_3とs_3が 0 が入れ替わったことが分かるので, s_3に関する制約表現を「$x_3 =$」の形に書き換える.

$$s_3 = 2 - 2x_3 + s_1$$

$$2x_3 = 2 + s_1 - s_3$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_3$$

よって，制約条件は

$$\begin{aligned} \textit{subject to}:\quad & x_2 = 4 - \left(1 + \frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_3\right) - 2s_1 + s_2 \\ & x_1 = 2 + s_1 - s_2 \\ & x_3 = 1 + \frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_3 \\ & z = 14 + 2\left(1 + \frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_3\right) - s_1 - s_2 \end{aligned}$$

となり，これを変形して

$$\begin{aligned} \textit{subject to}:\quad & x_2 = 3 - \frac{5}{2}s_1 + s_2 + \frac{1}{2}s_3 \\ & x_1 = 2 + s_1 - s_2 \\ & x_3 = 1 + \frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_3 \\ & z = 16 - s_2 - s_3 \end{aligned}$$

が得られる．この制約条件における基底解は

$$(s_1, s_2, s_3, x_2, x_1, x_3, z) = (0,0,0,3,2,1,16)$$

となり，$(x_1, x_2, x_3) = (2,3,1)$のとき最大値 16 をとる．

問題 1.3 次の線形計画問題を解け. 【解答】

$$
\begin{aligned}
\mathit{maximize}: \quad & z = x_1 + x_2 + 2x_3 \\
\mathit{subject\ to}: \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\
& x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 12 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

２．行列と方程式

線形計画問題では連立 1 次方程式を変形することで最適解を求めた．この方法をアルゴリズム化するため，大学 1 年生で学ぶ線形代数の内容である「行列と方程式」について学習する．

2.1 行列

行列とは，成分とよばれる数や記号の要素を縦方向と横方向に長方形（正方形も含む）状に並べたものである．行列は，数・記号の並び全体を括弧で括って表す．以下のようなものはすべて行列である．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\pi} \end{pmatrix}$$

特に，1 行からなる行列を**行ベクトル**，1 列からなる行列を**列ベクトル**という．

行列における横の並びを「行」，縦の並びを「列」という．行・列の覚え方は図 2.1 を参考にするとよい．

図2.1　行・列の覚え方

行数がm，列数がnの行列を「m行n列の行列」または「$m \times n$行列」という．行列を構成する要素の 1 つ 1 つのことを**成分**といい，i行とj列の交わった位置にある成分を「i行j列成分」または「(i,j)成分」という．また，一般的に 1 つの行列は以下のようにアルファベット 1 文字で表現される．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \pi & e & -\frac{1}{9} \\ \frac{3}{4} & \sqrt{a+4} & x-3y \end{pmatrix},\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

各成分を具体的に与えない$m \times n$行列は以下のように表すこともある．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

さらに，行数・列数も定めない場合は$A = \left(a_{ij}\right)$と表す．

例題 2.1 次の行列について，行列の型（$m \times n$行列）を求めよ．また，指定された成分の値を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$ $\left[(2,3)\text{成分}\right]$

(2) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0.5 & \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{3} & 3e & -2.9 \end{pmatrix}$ $\left[(1,3)\text{成分}\right]$

[解答]

(1) $\boxed{3 \times 3 \text{ 行列}}$，$(2,3)$成分は$\boxed{-6}$.

(2) $\boxed{2 \times 3 \text{ 行列}}$，$(1,3)$成分は$\boxed{\frac{\pi}{2}}$.

問題 2.1 次の行列について，行列の型（$m \times n$行列）を求めよ．また，指定された成分の値を求めよ．【解答】

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & \sqrt{2} & -4 \end{pmatrix}$ $\left[(2,1)\text{成分}\right]$

(2) $\begin{pmatrix} 1.5 & -0.3 \\ -3 & -0.4 \\ 2.7 & 1.2 \end{pmatrix}$ $\left[(1,2)\text{成分}\right]$

例題 2.2 $m \times n$行列$A = (a_{ij})$が，以下の規則により定められている．Aを求めよ．

(1) 2×3行列，$a_{ij} = i + j$

(2) 3×2行列，$a_{ij} = 2i - 3j$

[解答]

(1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}}$

(2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 & 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 & 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 & 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}$

問題 2.2 $m \times n$行列$A = (a_{ij})$が，以下の規則により定められている．Aを求めよ．【解答】

(1) 2×2行列，$a_{ij} = ij$

(2) 2×3行列，$a_{ij} = i^2 - j^2$

2.2 行列の演算

行列の和・差・積は次のように定められる．

行列の和･差

行列の和・差は，行列の型（$m \times n$行列）が同じもの同士でのみ計算できる．型が異なるものは計算できない．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm a_{mn} \end{pmatrix}$$

例題 2.3 次の計算をせよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

[解答]

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-6) & 2+(-4) & 3+(-2) \\ -3+2 & -2+4 & -1+5 \end{pmatrix}$$
$$= \boxed{\begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-1 & 9-(-1) \\ 8-(-2) & 7-2 \\ 6-3 & 5-(-3) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}}$$

問題 2.3 次の計算をせよ．【解答】

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -5 & 7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$

行列の積

行列の積は，「掛ける行列の列数」と「掛けられる行列の行数」が等しいもの同士でのみ計算できる（「$m \times n$行列」掛ける「$n \times p$行列」なら計算可）．「掛ける行列の列数」と「掛けられる行列の行数」が異なる場合は計算できない．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

ただし，

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \, .$$

例題 2.4 次の計算をせよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

[解答]

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) \\ (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 & (-3) \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 4 + 9 & -1 + 4 - 9 \\ -3 + 4 - 3 & 3 - 4 + 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \\ (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-3) & (-2) \cdot 2 + 2 \cdot (-2) & (-2) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) & 3 \cdot 2 + (-3) \cdot (-2) & 3 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 3 & 2 + 2 & 3 + 1 \\ -2 - 6 & -4 - 4 & -6 - 2 \\ 3 + 9 & 6 + 6 & 9 + 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -8 & -8 & -8 \\ 12 & 12 & 12 \end{pmatrix}}$$

問題 2.4 次の計算をせよ．【解答】

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2.3 連立 1 次方程式とその解法

中学校で学習した連立 1 次方程式を思い出してみよう．例えば

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

の形の連立 1 次方程式は「2 元連立 1 次方程式」とよぶ．ここでは，一般に「n元連立 1 次方程式」を行列の形で表し，その解法の 1 つである掃き出し法について学ぶ．

行列と連立 1 次方程式

一般にn元連立 1 次方程式は，次のように表すことができる．

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

この連立 1 次方程式は，次のように行列とベクトルを用いて，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

と表すことができる．いま，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とおけば，上の連立 1 次方程式は$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$と表すことができる．このとき，行列$A$を**係数数行列**，行列$(A|\boldsymbol{b})$を**拡大係数行列**という．

例題 2.5 次の連立方程式を行列の積の形で表し，拡大係数行列を求めよ．

(1) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x + z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 3y + 2z = 4 \end{cases}$

[解答]

（1） $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)}$$

（2） $\begin{cases} x + z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 3y + 2z = 4 \end{cases}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)}$$

問題 2.5 次の連立方程式を行列の積の形で表し，拡大係数行列を求めよ．【解答】

（1） $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ -x - 3y + 2z = 3 \end{cases}$

（2） $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + 3z = 1 \\ 2y - z = 5 \end{cases}$

掃き出し法による連立 1 次方程式の解法

まず初めに中学校で学習した連立 1 次方程式の解法「加減法」について思い出してみよう．具体的に以下の連立 1 次方程式を解いてみる．

例：加減法による連立 1 次方程式の解の求め方

$$\begin{cases} x - 3y = -1 \cdots ① \\ 2x + y = \quad 5 \cdots ② \end{cases}$$

①＋ 3 ×②より

$$\begin{array}{rr} & x - 3y = -1 \\ +) & 6x + 3y = 15 \\ \hline & 7x \qquad = 14 \end{array}$$

よって，$x = 2$．これを②に代入して，

$$2 \cdot 2 + y = 5$$
$$y = 1$$

よって，求める解は$(x, y) = (2,1)$.

さて，この解法を踏まえた上で掃き出し法とよばれる解法を学んでいこう．上の例で，連立 1 次方程式において許される変形は以下の 3 つであることが分かる．

i.	式を何倍かする
ii.	2 つの式を入れ替える
iii.	1 つの式に他の式の何倍かを加える

この 3 つの変形規則に従って例を解いてみると次のようになる．

$$\begin{cases} x-3y=-1\cdots① \\ 2x+y=\quad 5\cdots② \end{cases}$$

iii.を用いて①＋ 3 ×②より

$$\begin{cases} 7x\qquad\quad =14\cdots③ \\ 2x+\ \ y=\quad 5\cdots④ \end{cases}$$

i.を用いて③$\times\frac{1}{7}$より

$$\begin{cases} x\qquad\quad =2\cdots⑤ \\ 2x+\ \ y=5\cdots⑥ \end{cases}$$

iii.を用いて⑥＋(-2)×⑤より

$$\begin{cases} x\qquad\quad =2\cdots⑦ \\ \qquad\quad y=1\cdots⑧ \end{cases}$$

これにより求める解は$(x,y)=(2,1)$.

このことから，連立 1 次方程式を解くためには係数・定数の変形操作のみで解くことができることが分かる．つまり，連立 1 次方程式を文字までしっかり記述する必要はなく，先に紹介した拡大係数行列について変形操作を実施すればよい．それでは拡大係数行列を変形して解を求める「掃き出し法」について学習していこう．

掃き出し法

加減法による方程式の解法をアルゴリズム化する．先の例について，拡大係数行列の変化を見ていこう．

連立方程式	拡大係数行列
$\begin{cases} x - 3y = -1 \cdots ① \\ 2x + y = \quad 5 \cdots ② \end{cases}$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$
①＋ 3 ×②	1 行目＋3×2 行目
$\begin{cases} 7x \qquad = 14 \cdots ③ \\ 2x + \ \ y = \ \ 5 \cdots ④ \end{cases}$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 7 & 0 & 14 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$
③×$\frac{1}{7}$	1 行目×$\frac{1}{7}$
$\begin{cases} x \qquad = 2 \cdots ⑤ \\ 2x + \ \ y = 5 \cdots ⑥ \end{cases}$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$
⑥＋(-2)×⑤	2 行目＋(-2)×1 行目
$\begin{cases} x \qquad = 2 \cdots ⑦ \\ \qquad y = 1 \cdots ⑧ \end{cases}$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

拡大係数行列の操作に着目すると，以下の 3 つの操作で拡大係数行列を変形していることが分かる（この変形をまとめて**行の基本変形**という）．

i. 行を何倍かする
ii. 2 つの行を入れ替える
iii. 1 つの行に他の行の何倍かを加える

さらに，連立 1 次方程式の解が 1 つに定まるためには，拡大係数行列の左側が

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

の形になっていることが必要であることも分かる（この行列を**単位行列**という）．

例題 2.6 掃き出し法により次の連立方程式を解け.

(1) $\begin{cases} x+3y=-2 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+z=0 \\ 2x-y=0 \\ 3y+2z=4 \end{cases}$

[解答]

(1) $\begin{cases} x+3y=-2 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{2\text{行目}+1\text{行目}\times(-2)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 7 \end{array}\right)$$

$$\underset{2\text{行目}\times\left(-\frac{1}{7}\right)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{1\text{行目}+2\text{行目}\times(-3)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

よって, $\boxed{(x,y)=(1,-1)}$.

(2) $\begin{cases} x+z=0 \\ 2x-y=0 \\ 3y+2z=4 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \underset{2\text{行目}+1\text{行目}\times(-2)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{2\text{行目}\times(-1)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \underset{3\text{行目}+2\text{行目}\times(-3)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{3\text{行目}\times\left(-\frac{1}{4}\right)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{3\text{行目}+1\text{行目}\times(-1)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{3\text{行目}+2\text{行目}\times(-2)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

よって, $\boxed{(x,y,z)=(1,2,-1)}$.

問題 2.6 掃き出し法により次の連立方程式を解け.【解答】

(1) $\begin{cases} x-2y=\ \ 6 \\ 3x+4y=-2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=\ \ 2 \\ -x-3y+2z=-7 \\ 2x+2y-\ \ z=\ \ 7 \end{cases}$

３．掃き出し法によるシンプレックス法

第 1 章のシンプレックス法は変数が増加するほど計算が煩雑になる．そこで，第 2 章の掃き出し法を応用してシンプレックス法を実行してみよう．

1.1　掃き出し法によるシンプレックス法

第 1 章の例 1.2 を順に追って，シンプレックス法の手順を確認してみよう．

[手順]

スラック変数s_1, s_2を導入し，等式制約表現に書き換えると以下の式が得られる．また，同時に行列表現として扱いやすいよう右辺を定数項のみの形に変形する．

$$
\begin{array}{ll}
\textit{maximize}: & z \\
\textit{subject to}: & s_1 = 9 - 3x - y \\
& s_2 = 8 - x - 2y \\
& z = 3x + 2y \\
& x, y, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\textit{maximize}: & z \\
\textit{subject to}: & 3x + y + s_1 = 9 \\
& x + 2y + s_2 = 8 \\
& -3x - 2y + z = 0 \\
& x, y, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$

第 1 式を軸として最大化探索を行うと，次のように式変形がなされる．

$$
\begin{array}{ll}
\textit{maximize}: & z \\
\textit{subject to}: & x = 3 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}s_1 \\
& s_2 = 5 - \frac{5}{3}y + \frac{1}{3}s_1 \\
& z = 9 + y - s_1
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\textit{maximize}: & z \\
\textit{subject to}: & x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}s_1 = 3 \\
& \frac{5}{3}y - \frac{1}{3}s_1 + s_2 = 5 \\
& -y + s_1 + z = 9
\end{array}
$$

第 2 式を軸として最大化探索を行うと，次のように式変形がなされる．

$$
\begin{array}{ll}
\textit{maximize}: & z \\
\textit{subject to}: & x = 2 - \frac{2}{5}s_1 + \frac{1}{5}s_2 \\
& y = 3 + \frac{1}{5}s_1 - \frac{3}{5}s_2 \\
& z = 12 - \frac{4}{5}s_1 - \frac{3}{5}s_2
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\textit{maximize}: & z \\
\textit{subject to}: & x + \frac{2}{5}s_1 - \frac{1}{5}s_2 = 2 \\
& y - \frac{1}{5}s_1 + \frac{3}{5}s_2 = 3 \\
& z + \frac{4}{5}s_1 + \frac{3}{5}s_2 = 12
\end{array}
$$

これにより，$s_1, s_2 \geq 0$であることから$s_1 = s_2 = 0$のときzは最大化され，その値は$z = 12$であることが分かり，またそのときのx, yの値は$(x, y) = (2,3)$であることが分かる．

これを拡大係数行列で追ってみよう（最終形において左 3 列までが単位行列の形になっていることを意識すること）．

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ここで第 1 行を軸として行変形を行う．第 1 行を軸とする根拠は，定数項である「3」が他の正の値の中で最小であるからである．

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 3 \\ 0 & 5/3 & 0 & -1/3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

次に第 2 行を軸として行変形を行う．

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/5 & -1/5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 & 3/5 & 12 \end{array}\right)$$

ここで，左 3 列までが単位行列の形となり，シンプレックス法が完了する．

それでは，掃き出し法によるシンプレックス法で線形計画問題を解いてみよう．

例題 1.4 次の線形計画問題を解け．

$$\begin{aligned} &maximize: && z = 3x + 2y \\ &subject\ to: && x + 2y \leq 10 \\ & && 2x + y \leq 11 \\ & && x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

[解答]

スラック変数s_1, s_2を導入し，等式制約表現に書き換えると以下の式が得られる．また，同時に行列表現として扱いやすいよう右辺を定数項のみの形に変形する．

$$\begin{array}{ll} maximize: & z \\ subject\ to: & s_1 = 10 - x - 2y \\ & s_2 = 11 - 2x - y \\ & z = 3x + 2y \\ & x, y, s_1, s_2 \geq 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} maximize: & z \\ subject\ to: & x + 2y + s_1 = 10 \\ & 2x + y + s_2 = 11 \\ & -3x - 2y + z = 0 \\ & x, y, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

拡大係数行列を掃き出し法により式変形する．

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

第 1,2 行の第 1 成分を 1 にする．

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 11/2 \\ -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ここで定数項を確認すると，$11/2$が正の数でかつ最小であるので，1 行目と 2 行目を入れ換える．

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 11/2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1 行目を軸とし，行の式変形を用いて他の行の第 1 成分を 0 とする．

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 11/2 \\ 0 & 3/2 & 0 & 1 & -1/2 & 9/2 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 & 3/2 & 33/2 \end{array}\right)$$

(2,2)成分を 1 にするため，第 2 行に$2/3$を掛ける．

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 11/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 3 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 & 3/2 & 33/2 \end{array}\right)$$

2 行目を軸とし，行の式変形を用いて他の行の第 2 成分を 0 とする．

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 4/3 & 18 \end{array}\right)$$

左 3 列までが単位行列の形となったので, 掃き出し法によるシンプレックス法が完了する．

定数項部分の$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix}$を読み取れば，$\boxed{(x, y) = (4,3)\text{のとき}z\text{は最大値 }18}$をとることが分かる．

問題 2.7 掃き出し法によるシンプレックス法を用いて次の最大化問題を解け．【解答(1) (2)】

(1)

$$\begin{aligned} &maximize: && z = 40x + 30y \\ &subject\ to: && x + 2y \le 16 \\ &&& x + y \le 9 \\ &&& 3x + 2y \le 24 \\ &&& x \ge 0, y \ge 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} &maximize: && P = 2x + 2y + z \\ &subject\ to: && 2x + y - z \le 2 \\ &&& 2x - y + 5z \le 6 \\ &&& 4x + y + z \le 6 \\ &&& x, y, z \ge 0 \end{aligned}$$

1.2　掃き出し法によるシンプレックス法の応用

次の生産計画問題を解いてみよう．

例題 1.5 ある会社では，3 つの原料Ⅰ，Ⅱ，Ⅲを使って，3 種類の製品A, Bを生産している．製品Aを 1[t]生産するには，原料Ⅰ，Ⅱ，Ⅲがそれぞれ 1, 1, 3[t]必要であり，製品Bを 1[t]生産するには，原料Ⅰ，Ⅱ，Ⅲがそれぞれ 2, 1, 1[t]必要である．1 日の原料Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの使用可能量は，それぞれ 14, 8, 18[t]である．また，製品A, Bを生産したときの 1[t]あたりの利益はそれぞれ 30 万円，20 万円である．1 日あたりの利益を最大にするには，製品A, Bをどれくらい生産すればよいか．

[解説]

問題に出ている条件を表にまとめてみよう．

	原料Ⅰ	原料Ⅱ	原料Ⅲ
製品A	1	1	3
製品B	2	1	1
使用可能量	14	8	18

表より，製品A, Bの生産量をx_1, x_2[t]とおいて，問題を次のように定式化する．

$$
\begin{aligned}
&maximize: && z = 30x_1 + 20x_2 \\
&subject\ to: && x_1 + 2x_2 \leq 14 \\
& && x_1 + \ \ x_2 \leq 8 \\
& && 3x_1 + \ \ x_2 \leq 18 \\
& && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

スラック変数s_1, s_2, s_3を導入し，等式制約表現に書き換えると以下の式が得られる．

$$
\begin{aligned}
&maximize: && z \\
&subject\ to: && x_1 + \ 2x_2 + s_1 = 14 \\
& && x_1 + \ \ x_2 + s_2 = 8 \\
& && 3x_1 + \ \ x_2 + s_3 = 18 \\
& && -30x_1 - 20x_2 + z \ = 0 \\
& && x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

拡大係数行列を掃き出し法により変形する．

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 14 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \\
-30 & -20 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

軸を決定するため，4 行目を除く行の第 1 成分をすべて 1 に揃える．

$$
\rightarrow\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 14 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\
1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 6 \\
-30 & -20 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

定数項をみると 3 行目の6が正数で一番小さいので，3 行目を軸にするため，1 行目と 3 行目を入れ替える．

$$\to\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ -30 & -20 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1 行目を軸にして行の基本変形を行う．1 行目以外の第 1 成分を 0 にする．

$$\to\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 6 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2 \\ 0 & 5/3 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 8 \\ 0 & -10 & 1 & 0 & 0 & 10 & 180 \end{array}\right)$$

軸を決定するため，2,3 行目の第 2 成分をすべて 1 に揃える．

$$\to\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 & 0 & -1/5 & 24/5 \\ 0 & -10 & 1 & 0 & 0 & 10 & 180 \end{array}\right)$$

定数項をみると 2 行目の3が正数で一番小さいので，2 行目を軸にする．2 行目を軸にして行の基本変形を行う．2 行目以外の第 2 成分を 0 にする．

$$\to\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3/5 & -3/2 & 3/10 & 9/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 & 5 & 210 \end{array}\right)$$

これにより，$(x_1, x_2) = (5,3)$のとき最大値 210 が得られる．すなわち，

製品A, Bをそれぞれ 5, 3[t]生産すれば最大利益 210 万円が得られる．

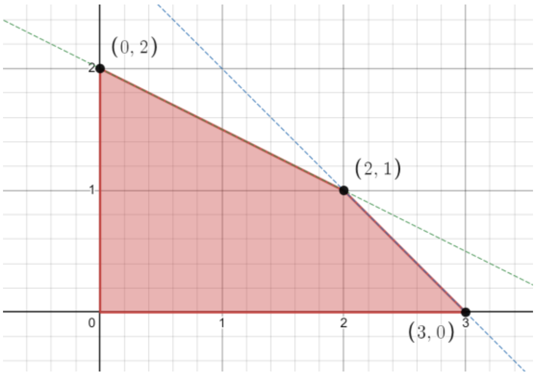
問題 2.8 掃き出し法によるシンプレックス法を用いて次の生産計画問題を解け．【解答】

ある会社では，3 つの原料Ⅰ，Ⅱ，Ⅲを使って，3 種類の製品A, Bを生産している．製品Aを 1[t]生産するには，原料Ⅰ，Ⅱ，Ⅲがそれぞれ 1, 4, 3[t]必要であり，製品Bを 1[t]生産するには，原料Ⅰ，Ⅱ，Ⅲがそれぞれ 2, 4, 1[t]必要である．1 日の原料Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの使用可能量は，それぞれ 22, 48, 24[t]である．また，製品A, Bを生産したときの 1[t]あたりの利益はそれぞれ 20 万円，10 万円である．1 日あたりの利益を最大にするには，製品A, Bをどれくらい生産すればよいか．

問題解答

問題 1.1

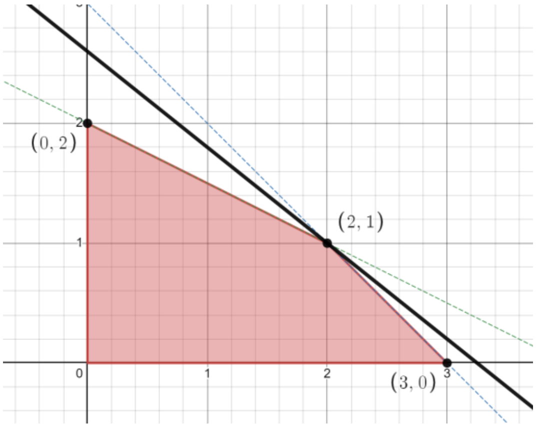
(1)　領域を図示すると下図のようになる．



これにより，$z = 4x + 5y$より

$$z = 4x + 5y$$
$$5y = -4x + z$$
$$y = -\frac{4}{5}x + \frac{z}{5}$$

であるので，上式は傾き$-\frac{4}{5}$，y切片$\frac{z}{5}$の直線を表す．この直線が上の領域内を通ることを考えれば，y切片$\frac{z}{5}$が最大となるのは点$(2,1)$を通るときである．



よって，$(x, y) = (2,1)$とすれば

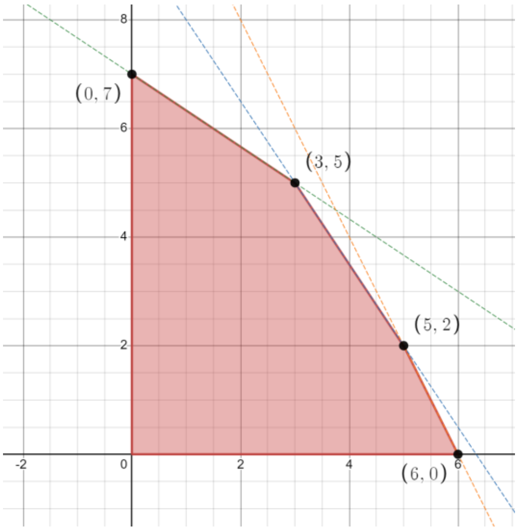
$$z = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 8 + 5 = 13$$

であるので，

$\boxed{(x, y) = (2,1)\text{のとき，}z\text{は最大値 13 をとる}}$.

【戻る】

(2)　領域を図示すると下図のようになる．



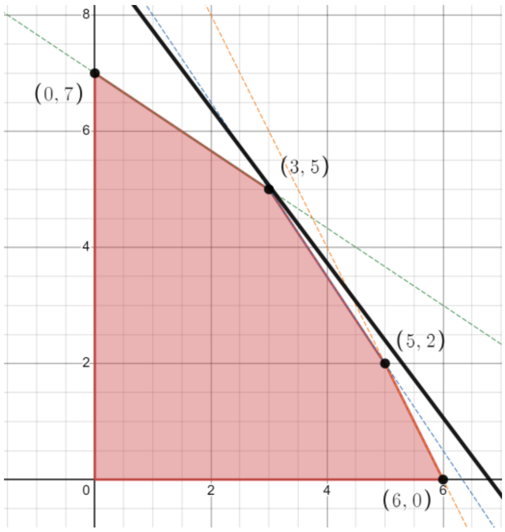
これにより，$z = 4x + 3y$より

$$z = 4x + 3y$$

$$3y = -4x + z$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{z}{3}$$

であるので，上式は傾き$-\frac{4}{3}$，y切片$\frac{z}{3}$の直線を表す．この直線が上の領域内を通ることを考えれば，y切片$\frac{z}{3}$が最大となるのは点$(3,5)$を通るときである．



よって，$(x, y) = (3,5)$とすれば

$$z = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 12 + 15 = 27$$

であるので，

$$\boxed{(x, y) = (3,5)\text{のとき，}z\text{は最大値 27 をとる}}.$$

【戻る】

問題 1.2 (1)

スラック変数s_1, s_2を導入し，等式制約表現に書き換える．

$$\begin{aligned} maximize: &\quad z \\ subject\ to: &\quad s_1 = 4 - 2x - y \\ &\quad s_2 = 5 - x - 2y \\ &\quad z = 5x + 4y \\ &\quad x, y, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

基底解は$(x, y, s_1, s_2, z) = (0,0,4,5,0)$であるので，最大化のため$x = t_1$とおく．このとき，制約表現は

$$\begin{aligned} s_1 &= 4 - 2t_1 \\ s_2 &= 5 - t_1 \\ z &= 5t_1 \end{aligned}$$

であるのでzを最大化するt_1は$t_1 = 2$である．よって，よりよい解

$$(x, y, s_1, s_2, z) = (2,0,0,3,10)$$

が得られる．いま，xとs_1の位置で 0 が入れ換わっているのでs_1の式をxについて整理する．

$$s_1 = 4 - 2x - y$$

$$2x = 4 - y - s_1$$

$$x = 2 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}s_1$$

これにより制約表現は

$$\begin{aligned} x &= 2 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}s_1 \\ s_2 &= 5 - \left(2 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}s_1\right) - 2y \\ z &= 5\left(2 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}s_1\right) + 4y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 2 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}s_1 \\ s_2 &= 3 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}s_1 \\ z &= 10 + \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}s_1 \end{aligned}$$

となる．この制約表現における基底解は$(s_1, y, x, s_2, z) = (0,0,2,3,10)$であるので，最大化のため$y = t_2$とおく．このとき，制約表現は

$$\begin{aligned} x &= 2 - \frac{1}{2}t_2 \\ s_2 &= 3 - \frac{3}{2}t_2 \\ z &= 10 + \frac{3}{2}t_2 \end{aligned}$$

であるのでzを最大化するt_2は$t_2 = 2$である．よって，よりよい解

$$(s_1, y, x, s_2, z) = (0,2,1,0,13)$$

が得られる．いま，yとs_2の位置で 0 が入れ換わっているのでs_2の式をyについて整理する．

$$s_2 = 3 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}s_1$$

$$\frac{3}{2}y = 3 + \frac{1}{2}s_1 - s_2$$

$$y = 2 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_2$$

これにより制約表現は

$$\begin{aligned} x &= 2 - \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_2\right) - \frac{1}{2}s_1 \\ y &= 2 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_2 \\ z &= 10 + \frac{3}{2}\left(2 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_2\right) - \frac{5}{2}s_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 1 - \frac{2}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2 \\ y &= 2 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_2 \\ z &= 13 - 2s_1 - s_2 \end{aligned}$$

となる．スラック変数の非負条件$s_1, s_2 \geq 0$より $\boxed{(x, y) = (1,2)\text{のとき最大値 } z = 13}$ をとることが分かる．

【戻る】

(2) スラック変数s_1, s_2, s_3を導入し，等式制約表現に書き換える．

$$\begin{aligned}
&maximize: \quad z \\
&subject\ to: \quad s_1 = 17 - x - 2y \\
&\qquad\qquad\qquad s_2 = 13 - 2x - y \\
&\qquad\qquad\qquad s_3 = 27 - 4x - 3y \\
&\qquad\qquad\qquad z = 3x + 2y \\
&\qquad\qquad\qquad x, y, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned}$$

基底解は$(x, y, s_1, s_2, s_3, z) = (0,0,17,13,27,0)$であるので，最大化のため$x = t_1$とおく．このとき，制約表現は

$$\begin{gathered}
s_1 = 17 - t_1 \\
s_2 = 13 - 2t_1 \\
s_3 = 27 - 4t_1 \\
z = 3t_1
\end{gathered}$$

であるのでzを最大化するt_1は$t_1 = \frac{13}{2}$である．よって，よりよい解

$$(x, y, s_1, s_2, s_3, z) = \left(\frac{13}{2}, 0, \frac{21}{2}, 0, 1, \frac{39}{2}\right)$$

が得られる．いま，xとs_2の位置で 0 が入れ換わっているのでs_2の式をxについて整理する．

$$\begin{aligned}
&s_2 = 13 - 2x - y \\
&2x = 13 - y - s_2 \\
&x = \frac{13}{2} - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}s_2
\end{aligned}$$

これにより制約表現は

$$\begin{aligned}
&s_1 = 17 - \left(\frac{13}{2} - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}s_2\right) - 2y \\
&x = \frac{13}{2} - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}s_2 \\
&s_3 = 27 - 4\left(\frac{13}{2} - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}s_2\right) - 3y \\
&z = 3\left(\frac{13}{2} - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}s_2\right) + 2y
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
&s_1 = \frac{21}{2} - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}s_2 \\
&x = \frac{13}{2} - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}s_2 \\
&s_3 = 1 - y + 2s_2 \\
&z = \frac{39}{2} + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}s_2
\end{aligned}$$

となる．この制約表現における基底解は

$$(s_2, y, s_1, x, s_3, z) = \left(0,0, \frac{21}{2}, \frac{13}{2}, 1, \frac{39}{2}\right)$$

であるので，最大化のため$y = t_2$とおく．このとき，制約表現は

$$\begin{aligned}
&s_1 = \frac{21}{2} - \frac{3}{2}t_2 \\
&x = \frac{13}{2} - \frac{1}{2}t_2 \\
&s_3 = 1 - t_2
\end{aligned}$$

であるのでzを最大化するt_2は$t_2 = 1$である．

よって，よりよい解

$$(s_2, y, s_1, x, s_3, z) = (0,1,9,6,0,20)$$

が得られる．いま，yとs_3の位置で 0 が入れ換わっているのでs_3の式をyについて整理する．

$$s_3 = 1 - y + 2s_2$$

$$y = 1 + 2s_2 - s_3$$

これにより制約表現は

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{21}{2} - \frac{3}{2}(1 + 2s_2 - s_3) + \frac{1}{2}s_2 \\ x &= \frac{13}{2} - \frac{1}{2}(1 + 2s_2 - s_3) - \frac{1}{2}s_2 \\ y &= 1 + 2s_2 - s_3 \\ z &= \frac{39}{2} + \frac{1}{2}(1 + 2s_2 - s_3) - \frac{3}{2}s_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s_1 &= 9 - \frac{5}{2}s_2 + \frac{3}{2}s_3 \\ x &= 6 - \frac{3}{2}s_2 + \frac{1}{2}s_3 \\ y &= 1 + 2s_2 - s_3 \\ z &= 20 - \frac{1}{2}s_2 - \frac{1}{2}s_3 \end{aligned}$$

となる．スラック変数の非負条件$s_1, s_2, s_3 \geq 0$より，$s_2 = 0, s_3 = 0$とすることでzは最大化され，$\boxed{(x, y) = (6,1)\text{のとき最大値 } z = 20}$をとることが分かる．

【戻る】

問題 1.3

等式制約表現に書き換える．

$$\begin{aligned}
&maximize: && z\\
&subject\ to: && s_1 = 7 - 2x_1 - x_2 - x_3\\
& && s_2 = 8 - x_1 - 2x_2 - x_3\\
& && s_3 = 12 - x_1 - x_2 - 3x_3\\
& && z = x_1 + x_2 + 2x_3\\
& && x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned}$$

基底解は

$$(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, z) = (0,0,0,7,8,12,0)$$

であるので，$x_1 = t_1$とおくと，

$$\begin{cases} s_1 = 7 - 2t_1 \\ s_2 = 8 - t_1 \\ s_3 = 12 - t_1 \\ z = t_1 \end{cases}$$

であるので，zを最大化するt_1は$t_1 = \frac{7}{2}$である．よってこの時点でもっともよい解は

$$(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, z) = \left(\frac{7}{2}, 0,0,0, \frac{9}{2}, \frac{17}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

である．ここでx_1とs_1が 0 が入れ替わったことが分かるので，s_1に関する制約表現を以下のように書き換える．

$$s_1 = 7 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$2x_1 = 7 - x_2 - x_3 - s_1$$

$$x_1 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}s_1$$

よって，制約表現は

$$\begin{aligned}
&subject\ to: && x_1 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}s_1\\
& && s_2 = 8 - \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}s_1\right) - 2x_2 - x_3\\
& && s_3 = 12 - \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}s_1\right) - x_2 - 3x_3\\
& && z = \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}s_1\right) + x_2 + 2x_3
\end{aligned}$$

となり，これを変形して

$$\textit{subject to}: \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}s_1 \\ s_2 &= \frac{9}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}s_1 \\ s_3 &= \frac{17}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + \frac{1}{2}s_1 \\ z &= \frac{7}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}s_1 \end{aligned}$$

が得られる．この制約表現における基底解は

$$(s_1, x_2, x_3, x_1, s_2, s_3, z) = \left(0,0,0,\frac{7}{2},\frac{9}{2},\frac{17}{2},\frac{7}{2}\right)$$

となる．同様にしてさらによい解を探すと

$$(s_1, x_2, x_3, x_1, s_2, s_3, z) = (0,3,0,2,0,7,5)$$

が得られる．ここでx_2とs_2が 0 が入れ替わったことが分かるので，s_2に関する制約表現を以下のように書き換える．

$$s_2 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}s_1$$

$$\frac{3}{2}x_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}s_1 - s_2$$

$$x_2 = 3 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_2$$

よって，制約表現は

$$\textit{subject to}: \quad \begin{aligned} x_1 &= 2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2 \\ x_2 &= 3 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_2 \\ s_3 &= 7 - \frac{7}{3}x_3 + \frac{1}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2 \\ z &= 5 + \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{3}s_2 \end{aligned}$$

この制約条件における基底解は

$$(s_1, s_2, x_3, x_1, x_2, s_3, z) = (0,0,0,2,3,7,5)$$

となる．同様にしてさらによい解を探すと

$$(s_1, s_2, x_3, x_1, x_2, s_3, z) = (0,0,3,1,2,0,9)$$

が得られる．ここでx_3とs_3が 0 が入れ替わったことが分かるので，s_3に関する制約表現を以下のように書き換える．

$$s_3 = 7 - \frac{7}{3}x_3 + \frac{1}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2$$

$$\frac{7}{3}x_3 = 7 + \frac{1}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2 - s_3$$

$$x_3 = 3 + \frac{1}{7}s_1 + \frac{1}{7}s_2 - \frac{3}{7}s_3$$

よって，制約表現は

$$\begin{aligned} \textit{subject to}: \quad & x_1 = 1 - \frac{5}{7}s_1 + \frac{2}{7}s_2 + \frac{1}{7}s_3 \\ & x_2 = 2 + \frac{2}{7}s_1 - \frac{5}{7}s_2 + \frac{1}{7}s_3 \\ & x_3 = 3 + \frac{1}{7}s_1 + \frac{1}{7}s_2 - \frac{3}{7}s_3 \\ & z = 9 - \frac{7}{21}s_1 - \frac{7}{21}s_2 - \frac{4}{7}s_3 \end{aligned}$$

となり，スラック変数の非負条件$s_1, s_2, s_3 \geq 0$より$(x_1, x_2, x_3) = (1,2,3)$のとき最大値$z = 9$をとることが分かる．

【戻る】

問題 2.1

（1）　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & \sqrt{2} & -4 \end{pmatrix}$　$\left[(2,1)\text{成分}\right]$

行列の型：2×3行列，$(2,1)$成分：-2

（2）　$\begin{pmatrix} 1.5 & -0.3 \\ -3 & -0.4 \\ 2.7 & 1.2 \end{pmatrix}$　$\left[(1,2)\text{成分}\right]$

行列の型：3×2行列，$(1,2)$成分：-0.3

【戻る】

問題 2.2

（1）　2×2行列，$a_{ij} = ij$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}$$

（2）　2×3行列，$a_{ij} = i^2 - j^2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 - 1^2 & 1^2 - 2^2 & 1^2 - 3^2 \\ 2^2 - 1^2 & 2^2 - 2^2 & 2^2 - 3^2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}}$$

【戻る】

問題 2.3

（1）　$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3-5 & 2-3 & 1-1 \\ -1+1 & -2+3 & -3+5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

（2）　$\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -5 & 7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 7-2 & -9+4 \\ -5+4 & 7-6 \\ 3-6 & -5+8 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}}$$

【戻る】

問題 2.4

(1) $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot(-4) + 1\cdot 3 & 3\cdot(-4) + 2\cdot 3 + 1\cdot(-2) \\ (-1)\cdot 2 + (-2)\cdot(-4) + (-3)\cdot 3 & (-1)\cdot(-4) + (-2)\cdot 3 + (-3)\cdot(-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6-8+3 & -12+6-2 \\ -2+8-9 & 4-6+6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 1 & 1\cdot(-3) + (-2)\cdot 2 & 1\cdot(-1) + (-2)\cdot 3 \\ (-3)\cdot(-2) + 4\cdot 1 & (-3)\cdot(-3) + 4\cdot 2 & (-3)\cdot(-1) + 4\cdot 3 \\ 2\cdot(-2) + (-3)\cdot 1 & 2\cdot(-3) + (-3)\cdot 2 & 2\cdot(-1) + (-3)\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2-2 & -3-4 & -1-6 \\ 6+4 & 9+8 & 3+12 \\ -4-3 & -6-6 & -2-9 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & -7 & -7 \\ 10 & 17 & 15 \\ -7 & -12 & -11 \end{pmatrix}}$$

【戻る】

問題 2.5

(1) $$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ -x - 3y + 2z = 3 \end{cases}$$

行列の積の形：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

(2) $$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + 3z = 1 \\ 2y - z = 5 \end{cases}$$

行列の積の形：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

【戻る】

問題 2.6

(1) $\begin{cases} x-2y=\ \ 6 \\ 3x+4y=-2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 10 & -20 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

よって，$\boxed{(x,y)=(2,-2)}$.

(2) $\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=\ \ 2 \\ -x-3y+2z=-7 \\ 2x+2y-\ \ z=\ \ 7 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & -7 \\ 2 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

よって，$\boxed{(x,y,z)=(2,1,-1)}$.

【戻る】

問題 2.7

(1) $\quad maximize: \quad z = 40x + 30y$

$subject\ to:$
$$
\begin{gathered}
x + 2y \leq 16 \\
x + y \leq 9 \\
3x + 2y \leq 24 \\
x \geq 0, y \geq 0
\end{gathered}
$$

スラック変数を導入して制約条件を等式表現に書き換えれば

$$
\begin{gathered}
x + 2y + s_1 = 16 \\
x + y + s_2 = 9 \\
3x + 2y + s_3 = 24 \\
-40x - 30y + z = 0 \\
x, y, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{gathered}
$$

となる．これを掃き出し法によるシンプレックス法で計算する．

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \\
3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 24 \\
-40 & -30 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\rightarrow
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \\
1 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 8 \\
-40 & -30 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

3 行目の定数項が正数で最小なので，3 行目を軸とする．1 行目と入れ替えて計算すると，以下のようになる．

$$
\rightarrow
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 8 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \\
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\
-40 & -30 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\rightarrow
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 8 \\
0 & 1/3 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1 \\
0 & 4/3 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 8 \\
0 & -10/3 & 1 & 0 & 0 & 40/3 & 320
\end{array}\right)
$$

$$
\rightarrow
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 8 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 3/4 & 0 & -1/4 & 6 \\
0 & 1 & -3/10 & 0 & 0 & -4 & -96
\end{array}\right)
$$

2 行目の定数項が正数で最小なので，2 行目を軸とする．

$$
\rightarrow
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 6 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 3/4 & -3 & 3/4 & 3 \\
0 & 0 & -3/10 & 0 & -3 & -3 & -99
\end{array}\right)
$$

$$
\rightarrow
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 6 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 3/4 & -3 & 3/4 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 10 & 330
\end{array}\right)
$$

上記計算により，$\boxed{(x, y) = (6,3)\text{のとき最大値}z = 330\text{ をとる}}$.

【戻る】

(2) $\quad maximize: \quad P = 2x + 2y + z$

$$
\begin{aligned}
subject\ to: \quad 2x + y &\le 12\\
x + 2y &\le 12\\
x + y + 2z &\le 16\\
x, y, z &\ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12\\
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12\\
1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 16\\
-2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\to
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 6\\
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12\\
1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 16\\
-2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

1 行目の定数項が正数で最小なので，1 行目を軸とする．

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 6\\
0 & 3/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 6\\
0 & 1/2 & 2 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 10\\
0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 12
\end{array}\right)
\to
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 6\\
0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 4\\
0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 2 & 20\\
0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -12
\end{array}\right)
$$

2 行目の定数項が正数で最小なので，2 行目を軸とする．

$$
\to
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 4\\
0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 4\\
0 & 0 & 4 & 0 & -2/3 & -2/3 & 2 & 16\\
0 & 0 & 1 & -1 & -2/3 & -2/3 & 0 & -16
\end{array}\right)
$$

$$
\to
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 4\\
0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 4\\
0 & 0 & 1 & 0 & -1/6 & -1/6 & 1/2 & 4\\
0 & 0 & 1 & -1 & -2/3 & -2/3 & 0 & -16
\end{array}\right)
$$

$$
\to
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 4\\
0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 4\\
0 & 0 & 1 & 0 & -1/6 & -1/6 & 1/2 & 4\\
0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & -1/2 & 0 & -20
\end{array}\right)
$$

$$
\to
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 4\\
0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 4\\
0 & 0 & 1 & 0 & -1/6 & -1/6 & 1/2 & 4\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 20
\end{array}\right)
$$

上記計算により，$\boxed{(x, y, z) = (4,4,4)\text{のとき最大値}z = 20\text{ をとる}}$.

【戻る】

問題 2.8

条件を表にまとめると以下のようになる．

	原料Ⅰ	原料Ⅱ	原料Ⅲ
製品A	1	4	3
製品B	2	4	1
使用可能量	22	48	24

表より，製品A, Bの生産量をx_1, x_2[t]とおいて，問題を次のように定式化する．

$$
\begin{aligned}
&maximize: \quad z = 20x_1 + 10x_2 \\
&subject\ to: \quad x_1 + 2x_2 \leq 22 \\
&\qquad 4x_1 + 4x_2 \leq 48 \\
&\qquad 3x_1 + x_2 \leq 24 \\
&\qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

スラック変数s_1, s_2, s_3を導入し，等式制約表現に書き換えると以下の式が得られる．

$$
\begin{aligned}
&maximize: \quad z \\
&subject\ to: \quad x_1 + 2x_2 + s_1 = 22 \\
&\qquad 4x_1 + 4x_2 + s_2 = 48 \\
&\qquad 3x_1 + x_2 + s_3 = 24 \\
&\qquad -20x_1 - 10x_2 + z = 0 \\
&\qquad x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

拡大係数行列を掃き出し法により変形する．

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 22 \\
4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 48 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 24 \\
-20 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

軸を決定するため，4 行目を除く行の第 1 成分をすべて 1 に揃える．

$$
\rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 22 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 12 \\
1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 8 \\
-20 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

3 行目の定数項が正数で最小なので，3 行目と 1 行目を入れ替える．

$$
\rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 8 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 12 \\
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 22 \\
-20 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

1 行目を軸とし，1 行目以外の 1 列目を 0 にする．

$$
\rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 8 \\
0 & 2/3 & 0 & 0 & 1/4 & -1/3 & 4 \\
0 & 5/3 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 14 \\
0 & -10/3 & 1 & 0 & 0 & 20/3 & 160
\end{array}\right)
$$

1,4 行目を除く行の第 1 成分をすべて 1 に揃える．

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccccc|c}1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 8\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/8 & -1/2 & 6\\ 0 & 1 & 0 & 3/5 & 0 & -1/5 & 42/5\\ 0 & -10/3 & 1 & 0 & 0 & 20/3 & 160\end{array}\right)$$

2 行目の定数項が正数で最小なので，2 行目を軸とする．

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & -1/8 & 1/2 & 6\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/8 & -1/2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 3/5 & -3/8 & 3/10 & 12/5\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5/4 & 5 & 180\end{array}\right)$$

これにより，$(x_1, x_2) = (6,6)$のとき最大値 180 が得られる．すなわち，

$\boxed{\text{製品}A, B\text{をそれぞれ 6, 6[t]生産すれば最大利益 180 万円が得られる}}$.

【戻る】

■動画は以下のサイトで視聴できます.

YouTube　URL：https://qr.paps.jp/tF3ei